数理解析研究所講究録
643巻 1988年 1-2

微分方程式の数値解法をめぐって

京都大学数理解析研究所／一松　信　(Sin Hitotumatu)

この研究会は実質的に Runge-Kutta法の研究会であった。　筆者はSarafyanの論文紹介をしたが、それらをめぐる感想を述べて責めを塞ぐことにする。

1．Sarafyanの公式について

1986年Berkeleyでの ICMの折に、偶然Sarafyanの講演を聞くことができ、その後色々と資料を送ってもらった。　彼の公式はいわゆる埋込み型のものである。　さらにTaylor展開に基く連続型の公式を多数示している。

ここに彼の公式を再掲することは控えるが、5-6 位の公式を４通りあげ、さらに４つの実例について試している。　その内特に興味深いのは、遊びのある機構をモデルとした方程式である。　解の符号や値の範囲によって右辺が変るために、かなり困難である。

このように解法公式を試すための適切な標準問題を集積することも、公式を作る以上に重要と思う。　その方面の努力もかかせない。

2．陰的Runge－Kutta型公式について

これまで主に使われてきた Runge-Kutta型公式は、陽的公式が中心だった。

しかし陽的公式は、段数 p を与えたときに最高達成可能位数q が一般に求められない上に、その位数の公式が何個かの自由パラメタを含んで、一意的に決らない難点がある。

2

「解けなかったら一般化せよ」というのは、逆説的な教訓であるが、この場合もそうである。 まったく一般のｐ段陰的 Runge-Kutta型公式は、最高達成可能位数が2pであり、しかも2p位の公式は一意的に決る。 ―この事実はかなり以前から知られていたらしいが、うかつにも私はこの研究会で初めて知った次第である。―

下に掲げたのは２段４位の陰的公式である。

$$
\begin{array}{c|cc}
\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6} \\
\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
a_1 & b_{11} & b_{12} \\
a_2 & b_{21} & b_{22} \\
\hline
 & w_1 & w_2
\end{array}
$$

一般にｐ段2p位の公式の分点と重みは、Gauss の積分公式のと同じであり、区間[0,1] のLegendre多項式の零点として与えられる。

この公式は絶対安定である。 一般には方程式を解くのが大変だが、線型に限れば直接に一次方程式を解いて求めることができる。 定数係数で刻みが一定ならば、連立一次方程式の係数は一定なので、一度ＬＵ分解をすれば、容易に解ける。 特殊な型に限っても、このような方式は実用になると信ずる。

但しこれで硬い(stiff) 方程式がすべて解けると思うのは早計だろう。 線型の場合には問題はなさそうだが、非線型のときにもこれで済むかは検討を要する。 しかし硬い方程式では、精度を上げるよりも安定に解く方が重要であり、４位ならば多くの場合充分と思うので、上記の２段公式を実地に試してみる必要があるだろう。 ―線型の場合にはうまくゆくようである。―